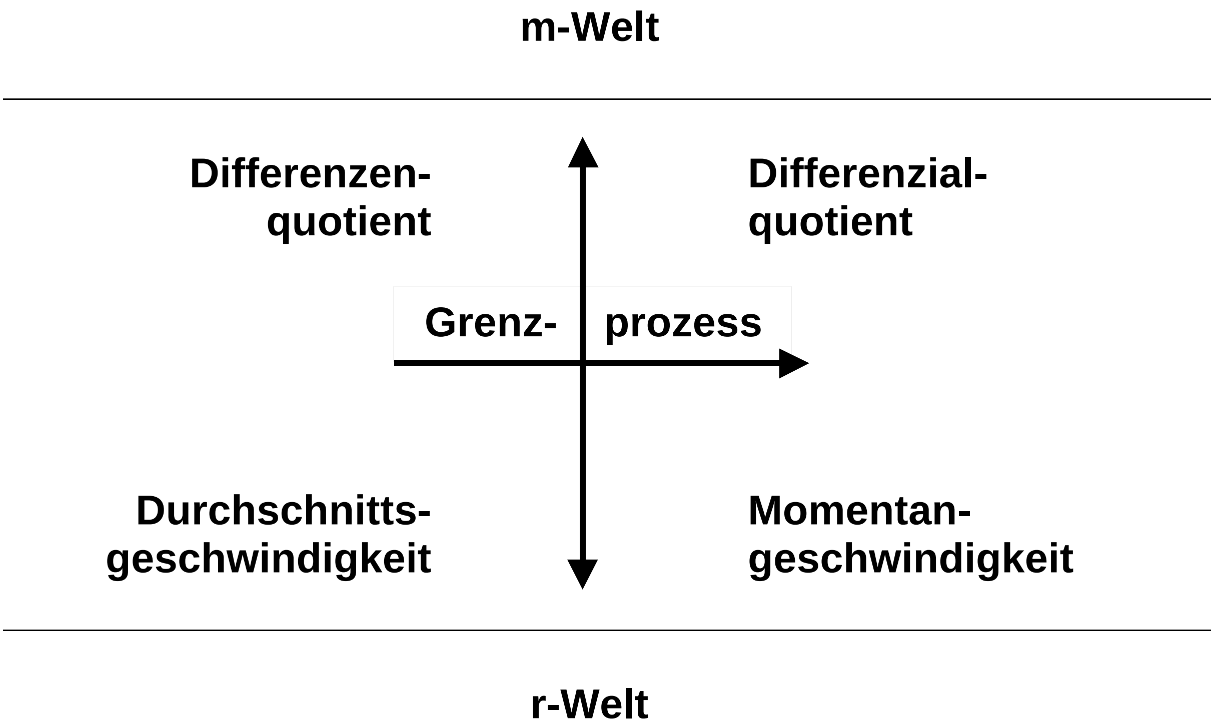
# Probleme mit dem Grenzwertbegriff beim Ableiten

## 1. Einleitung

Die lokale Änderungsrate ist eine der drei bekannten Grundvorstellungen für das Differenzieren. Grundvorstellungen sollen Schülerinnen und Schüler unterstützen, neue Begriffe zu erlernen. Dazu knüpft die „lokale Änderungsrate“ an außermathematische Alltagserfahrungen an. Blum und Törner führen in ihrem Buch „Didaktik der Analysis“ ([Blum/ Törner 1983]) eine Reihe von Beispielen an, die zur Betrachtung der lokalen Änderungsrate anregen. Das Beispiel der Momentangeschwindigkeit als Wert der Ableitung einer Weg-Zeit-Funktion zu einem Zeitpunkt scheint mir der Alltagswelt von Schülerinnen und Schülern besonders nahe zu liegen.
Im Rahmen meines Dissertationsvorhabens stellte ich Schülerinnen und Schülern eine anwendungsorientierte Aufgabe mit einer Weg-Zeit-Funktion, die das Vorankommen bei einer Radtour beschreibt. In der Aufgabe werden sie zunächst aufgefordert, einige Durchschnittsgeschwindigkeiten zu berechnen. Dann frage ich sie, ob es auch so etwas wie eine Momentangeschwindigkeit gibt. Anhand von Transkripten versuche ich zu ermitteln, welche Vorstellungen sie vom Grenzwertbegriff beim Ableiten im Zusammenhang mit der Momentangeschwindigkeit haben. Weiterhin interessiert mich, wie sich Überlegungen, Erkenntnisse und Vorwissen der Schülerinnen und Schüler bzgl. der realen Alltagswelt (r-Welt), in der die Anwendung angesiedelt ist, auf Überlegungen, Erkenntnisse und Vorwissen in der Mathematikwelt (m-Welt) auswirken und anders herum.
Folgende Graphik gibt die für mich zentralen Begriffe bzgl. meiner Aufgabe wieder. Beide Denkwelten haben ihre eigene Begrifflichkeit. Die Graphik zeigt auch, wie ich das Verhältnis von r- und m-Welt bzgl. meiner Aufgabe sehe:




Mit Schülerinnen- und Schülervorstellungen des Grenzwertbegriffs beim Ableiten beschäftigt sich auch Rudolf vom Hofe, der dazu u.a. [vom Hofe 1998] veröffentlicht hat. In seiner Arbeit betont er die Tangentensteigungs-Vorstellung. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten bei ihm also an einer eher innermathematischen Aufgabe.

## 2. Der Aufgabentext

Mein Aufgabentext wird hier im Original wiedergegeben:

Folgende Aufgabe besteht aus fünf Teilaufgaben. Jede Teilaufgabe soll schriftlich bearbeitet werden.

a) Jan Ulrich macht eine Radtour. „Zufällig" fährt er genau so, dass die Funktion f mit $f(t)=\frac{28t(10-t)}{5}$ für die ersten 5 Stunden wiedergibt, wie weit er bis zu einem Zeitpunkt schon vorangekommen ist. Start ist um 14:00 Uhr.

Folgende Wertetabelle gibt einige Entfernungen an, die Jan Ulrich bis zum jeweiligen Zeitpunkt zurückgelegt hat:

| Zeitpunkt | 14:30 | 15:00 | 15:30 | 16:00 | 17:00 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fahrdauer in h | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | | | |
| Zurückgelegter Weg in km | 26.6 | 50.4 | 71.4 | 89.6 | | | |

Wie weit ist er nach 3 Stunden gekommen?

b) Nach den ersten drei Stunden der Tour will der Trainer wissen, wie schnell Jan in diesen drei Stunden durchschnittlich gefahren ist. Auch interessieren ihn die Durchschnittsgeschwindigkeiten für die letzten 2 ½ Stunden, die letzten 2 Stunden, die letzten 1 ½ Stunden, die letzte Stunde und die letzte halbe Stunde.

c) Bisher war immer von *Durchschnittsgeschwindigkeiten* die Rede. Gibt es auch so etwas wie eine *Momentangeschwindigkeit* um 16:00 Uhr? Begründe!

d) Wie kannst Du *möglichst genau* die Momentangeschwindigkeit berechnen?

e) Überlege, ob und wie Du mit Deiner Methode die Momentangeschwindigkeit *ganz genau* berechnen kannst.

**Bemerkungen zur Aufgabe:**

Das Verhältnis von m- und r-Welt stellt einen wichtigen Aspekt meiner Untersuchung dar. Die Aufgabenteile c) bis e) tragen dem Rechnung: Die Schülerinnen und Schüler wußten, dass ich von der „Mathematik an der Universität" kam und eine mathematische Untersuchung vorhatte. Das „Begründe!" im Aufgabenteil c) fasse ich als eine Aufforderung auf, die Situation aus Sicht der r-Welt zu analysieren. Jedoch aufgrund ihrer Projektion, was ich von ihnen erwarten möge, verwandelten fast alle Schülerinnen und Schüler die Begründungsaufgabe in eine Berechnungsaufgabe, also in eine, die eher der m-Welt zuzuordnen ist. Deckten die anschließend den Aufgabenteil d) auf, bemerkten sie fast immer, dass sie diese Aufgabe bereits in c) gelöst hatten. Das brachte sie dazu, c) noch einmal, nun in der r-Welt-Sicht zu bearbeiten. Dabei war aber die mir von ihnen zugeschriebene Erwartungshaltung so mächtig, dass sie oft in ihren Gedankengängen zwischen Argumenten beider Denkwelten hin und her pendelten, was durchaus von mir erwünscht war.

## 3. Probleme mit dem Grenzwertbegriff beim Ableiten

r- und m-Welt spiegeln letztlich nur zwei mögliche Sichtweisen auf den Grenzwertbegriff wieder. Daher habe ich erwartet, dass sich begriffliche Probleme in der einen Welt auch in der anderen Welt wiederfinden lassen.
Im folgenden werde ich anhand von einigen Argumenten der Schülerinnen und Schülern unter anderem zeigen, dass tatsächlich bereits die Alltagssituation, also der Begriff der Momentangeschwindigkeit für Schülerinnen und Schüler Probleme birgt.

### I. „Momentangeschwindigkeit = Grenzwert“ und „Tacho“:

Transkript 14; Claudia und David; Klasse 12 LK
In ihrer Bearbeitung von Aufgabenteil e) haben Claudia und David den Differenzenquotienten an der Stelle 2 aufgestellt, den Nenner gekürzt und dann den Grenzwert bestimmt. Im anschließenden Gespräch fragt der Versuchsleiter:

VL: Ja, aber was hast du denn dann da gerade ausgerechnet?
C: Ja, aber in dem Moment ist er dann ja, in dem Moment wo er,.. zu dem Zeitpunkt hat er je ne gewisse Geschwindigkeit drauf. ... Weg hat er vielleicht zurückgelegt, aber die zeigt vielleicht ein Tacho (D: Ja.) würd das anzeigen. (VL: Aha.) Und der, in dem Moment. (VL: Ehm. D: Ja, hatten wir..) Das hatten wir ausgerechnet....
D: *(nuschelt)* ...
VL: Ja ist es nun die Momentangeschwindigkeit oder nicht?
C: Doch!
D: *(nuschelt)* Ist es die,.. ja
C: Ist es. ... Weil ich ja in dem Moment, die genau diese Geschwindigkeit, zu diesem Zeitpunkt, ich habe in diesem Moment vielleicht keine Strecke zurückgelegt, aber wenn ich das im Ganzen betrachte, würd ich, bin ich in dem Moment so schnell.

### II. „ohne Momentangeschwindigkeit keine Durchschnittsgeschwindigkeit“, „Wenn man die ganze Zeit fährt, hat man in jedem Moment eine Geschwindigkeit“,

Transkript 03; Christian und Heiko; Klasse 10

H: Gibt es auch so etwas wie eine Momentangeschwindigkeit um 16 Uhr?
C: Ja, natürlich.
H: Um exakt 16 Uhr. ... Ja, muß es ja geben.
C: *(zugleich)* Er fährt ja immer weiter. *(greift zum Stift und schreibt „ja“)*
H: Vorausgesetzt, er macht keine Pause um 16 Uhr.
C: Davon gehen wir mal nicht aus. Das schreibe ich jetzt einfach hier hin. *(schreibt den Satz auf)*
H: *(zum VL)* Also muß man hier mit, einfach nen Satz, Begründungssatz hinschreiben, oder? *(VL zuckt mit den Schultern)* Ja, ja, schreib das hin. ... *(C schreibt, 9s)* ... Du kannst doch schreiben, dass es keine Momentangeschwindigkeit geben würde, gibt's auch keine Durchschnittsgeschwindigkeit, weil dann würd er sich ja gar nicht bewegen.

**Bemerkungen zu I und II:**

Bei Claudia ist eine Übereinstimmung ihrer Vorstellungen bzgl. r- und m-Welt zu erkennen: Die Momentangeschwindigkeit gibt es in der r-Welt, da man sie am Tacho ablesen kann. In der m-Welt kann man sie mittels Ableiten berechnen. Heiko begründet hier die Existenz der Momentangeschwindigkeit nur in der r-Welt: Ohne Momentangeschwindigkeit gäbe es keine Durchschnittsgeschwindigkeit. Die Argumente der beiden enthalten dennoch bemerkenswert gegensätzliche Sichtweisen: Claudia betrachtet die Bewegung als Ganzes, startet gedanklich mit einem Zeitintervall, aus dem sie den besagten Zeitpunkt herauszieht. Heiko dagegen scheint gedanklich dieses Intervall aus Zeitpunkten zusammenzusetzen.

**III. „Wenn keine Zeit vergeht, bewegt man sich auch nicht", „Für Geschwindigkeit muß man auch einen Weg zurückgelegt haben" und „Momentangeschwindigkeit = Grenzwert = Näherung"**

Transkript 13; Alexander und Sebastian; Klasse 12 LK

A: Genau, weil in dem Augenblick keine Zeit vergeht. So. Und äh, theoretisch bewegt sich das Auto zu diesem Zeitpunkt nicht vorwärts. Sondern genau zu dieser Zeit bleibt es ja genau da stehen, wo ich hin gucke. *(VL und A durcheinander)* Ne Sekunde später ist das Auto woanders. Und dann kann ich den Weg, dann habe ich einmal den Weg, den Weg, den es zurückgelegt hat und die Zeit, und daraus ich irgendwie da die Geschwindigkeit berechnen. Also hat ne Geschwindigkeit, oder ne Beschleunigung oder wie auch immer, oder eine Verzögerung in diesem Zeitraum bestanden. (VL: Ehm.) Aber genau zu dem Augenblick, wo ich kucke (VL: Ehm; S: Ja.), ist es für mich gleich 0.

Der VL wiederholt, dass „t gegen 0" nicht heißen kann, dass man für t 0 einsetzt. (42:25) Dann fragt er, ob der Grenzwert die Momentangeschwindigkeit genau angibt.
A: Wenn t = 0 wird, (VL: Ja.) aber t wird ja nicht = 0.
VL: Wenn t = 0 wird, also einsetzen darfst du das nicht, dann hast du ja 0/0. (A: Ja, ja.)
S: Also kriegt man einen ganz knapp davon abweichenden Näherungswert.
A: Grenzwert eben.

**Bemerkungen zu I, II und III:**

Ähnlich wie Heiko scheint Alexander den Zeitpunkt ins Zentrum seiner Gedanken zu stellen. Allerdings spielen Zeitintervalle keine Rolle bei ihm. Er betrachtet seinen Zeitpunkt völlig isoliert vom Rest der Bewegung. Darin unterscheidet er sich eindeutig von Claudia. Sie kann den besagten Zeitpunkt nicht ohne die gesamte Bewegung denken. Ich möchte diese beiden Sichtweisen die „isolierte" und die „integrierte Sichtweise" nennen.

Anknüpfend an die Sichtweisen kommen Claudia und Alexander auch zu verschiedenen Auffassungen vom Grenzwert: Für Claudia stellt er den genauen Wert der Momentangeschwindigkeit dar, für Alexander eine Näherung. Beim Begriff „Grenzwert" betont Claudia scheinbar die Silbe „Wert", Alexander die Silbe „Grenz".

**IV. „Man kann in einem Zeitraum verschieden schnell sein“ und „Momentangeschwindigkeit = Grenzwert = Näherung“**

Transkript 03; Christian und Heiko; Klasse 10

H: Und das noch. *(liest vor)* Überlege, ob und wie du mit deiner Methode die Momentangeschwindigkeit ganz genau berechnen kannst.
C: Ist doch das *(meint Lösung von d))* ... Ne! Kannst nicht ganz genau berechnen.
H: Nö.
C: Weil, er kann sich in der einen Sekunde etwas schneller *(bewegt?)* und in der anderen Sekunde etwas langsamer.

**Bemerkung zu III und IV:**

Hier zeigt sich Christians Sichtweise vom Grenzwert in der m-Welt. Wie Alexander betont er den Näherungsaspekt, allerdings mit einer anderen Begründung: Für Alexander findet zu einem Zeitpunkt keine Bewegung statt, isolierte Sichtweise. Christian hat eine integrierte Sichtweise, da er sich einen Bewegungsvorgang vorstellt, bei dem sich die Geschwindigkeit ständig ändert. Diese ständige Änderung bedeutet für ihn, dass er die Momentangeschwindigkeit nur näherungsweise berechnen kann. Er benötigt als Schüler der 10. Klasse endliche Intervalle, da er noch keine Differentialrechnung kennengelernt hat.

**V. „Werte fehlen“ und „ist nicht berechenbar“:**

Transkript 10; Alexandra B. und Alexandra H.; Klasse 12 GK

Mir ist nicht immer klar, welcher Art die fehlenden Werte sind. Einerseits könnte gemeint sein, dass nur Kilometerwerte gegeben seinen, man aber Geschwindigkeitswerte berechnen soll , also eine Art Mittelwertbildung o.ä nicht möglich sei. Andererseits könnten die Schülerinnen und Schüler der Meinung sein, dass für eine genaue Berechnung der Momentangeschwindigkeit die vorhandenen Strecken zu ungenau seien, da die Wertetabelle Entfernungen nur im ½-Stunden-Takt wiedergibt.

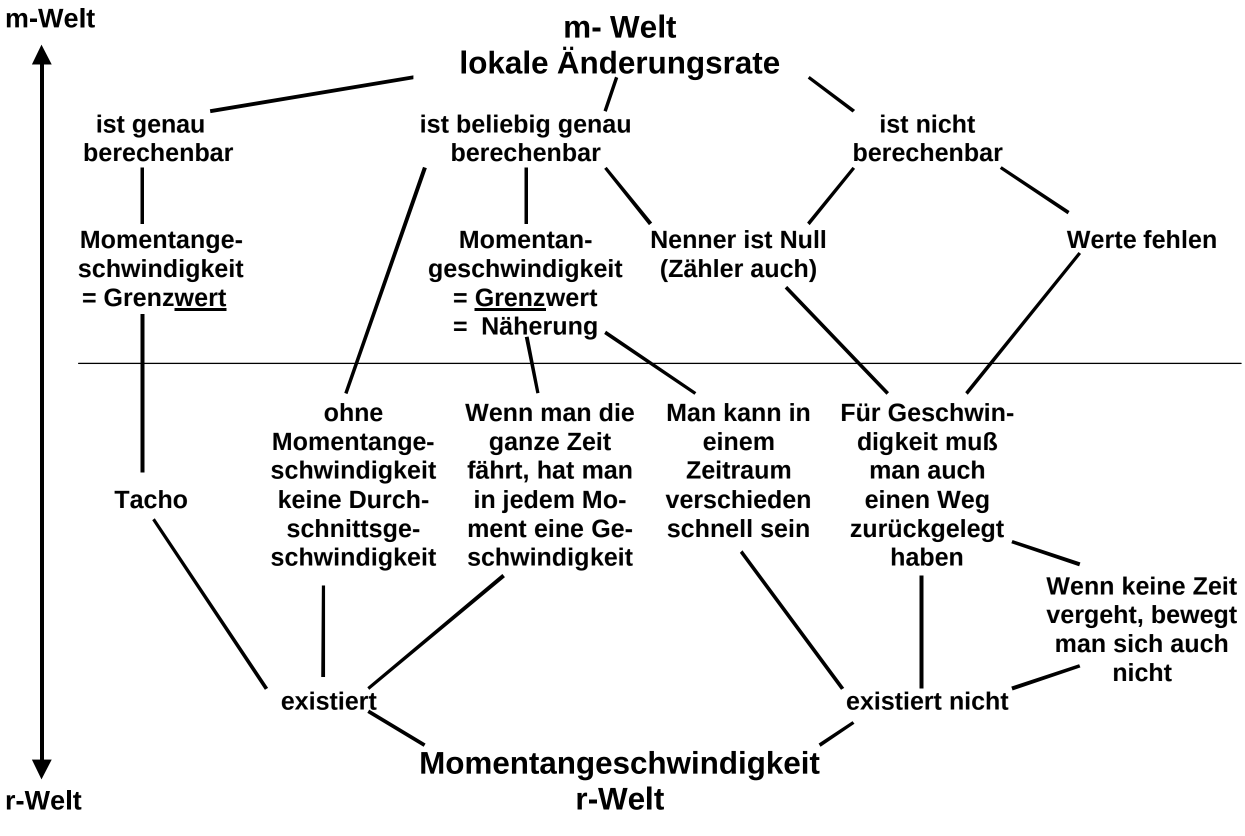
B: Ne, gibt’s nicht. ... Ich mein, die können wir einfach nicht so raus finden, weil, wir haben ja nur die Kilometerzahl, und dann halt hier so nen Abstand von jeweils einer halben Stunde. ... Und da kann man ja nicht sagen, er, ... ich mein, man könnte sich überlegen, dass er, er wird ja immer langsamer, aber man kann da nicht ne Momentangeschwindigkeit ...
H: Was ist eigentlich ne Momentangeschwindigkeit? Um Punkt 16 Uhr?
B: Genau da gefahren ist, wieviel km/h.
H: Ja, stimmt.
B: Oder er ist genau ... *(zeigt in die Tabelle)* ... ne, kann man nicht sagen. Weil... Sonst müßten,... ja, weiß ich nicht. Die Zeit vielleicht, jeweils um eine Minute oder so, dann hat man es ungefähr, (H: Ehm.) wenn man jeweils die Zeit dann hat.
H: Ja, stimmt. ... *(Pause 8s)* ... ok ... *(Pause 12s)* ... Es gibt eine Momentangeschwindigkeit, aber wir können sie nicht ermitteln. *(beide lachen, Pause 24s)* ...

**VI. „Nenner ist Null (Zähler auch)“:**

Dass Zähler und Nenner zu Null werden, wenn man den betrachteten Zeitpunkt einsetzt, scheint für die Schülerinnen und Schüler so selbstverständlich zu sein, dass sie fast nie explizit erwähnt wird. Fragt der Versuchsleiter im Gespräch nach, wird fast immer sofort darauf hingewiesen. In der Partnerarbeitsphase erwähnt z.B. Alexander explizit dieses Problem (13;188).

## 4. Schlußbemerkung

Einen vorläufigen Abschluß der deskriptiven Phase meiner Untersuchung stellt die folgende Graphik dar. In ihr sieht man nicht nur die genannten Argumente in beiden Denkwelten, sondern auch besonders deutlich gewordene Verbindungen zwischen diesen.
Der obere Teil der Graphik zeigt die m-Welt-Vorstellungen vom Grenzwertbegriff beim Ableiten, die ich meine bei den von mir untersuchten Schülerinnen und Schülern gefunden zu haben. Die darunter liegende Ebene gibt wieder, welche Bedeutung der Grenzwert jeweils hat, bzw. warum er nicht berechenbar ist. Von unten betrachtet beginnt die Graphik in der r-Welt. Hier gibt es Schülerinnen und Schüler, die die Existenz der Momentangeschwindigkeit bezweifeln und befürworten. Die darüber liegende Zeile gibt die jeweiligen Argumente wieder.
Die Zusammenhänge die Schülerinnen und Schüler zwischen den beiden Welten sehen, sind durch die sechs Linien der mittleren Ebene der Graphik wiedergegeben.




## 5. Literatur

[Blum/Törner 1983]: Blum, W / Törner, G.: „Didaktik der Analysis“ vandenhoek & ruprecht, Göttingen 1983
[vom Hofe 1998]: vom Hofe, Rudolf: „Probleme mit dem Grenzwert – Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse“ in: JMD 19 / 4, 1998

Hauke Friedrich, Februar 2000